

معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

به نام خدا

این جلسه میفوییم با عبارتهای گویا آشنا بشیم ولی قبل از اون، لازمه یه مقدار از مطالب فصلهای قبل رو مرور کنیم.

اگه به مبدا "چند جمله‌ای‌ها" مسلط هستید می‌تونید سه صفحه اول رو نفونید.

تعریف یک جمله‌ای:

هر عبارت که به صورت حاصلضرب یک عبارت حقیقی در توانهای صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک جمله‌ای می‌نامیم. مثلاً:

$$7, x, 5x^2, -\sqrt{3}a^2x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{7}$$

زیر قسمت‌های مهم تعریف، فقط کشیدیم که بتونیم یک جمله‌ای‌ها رو بیشتر بشناسیم.

۱. اولین نکته اینه که توانهای متغیرها باید صحیح و نامنفی باشه. اگه مثالهای بالا رو

ببینید متوجه میشید که همه توانها صحیح و نامنفی هستند.

عدد صفر هم صحیح و نامنفیه، پس می‌تونه به عنوان توان متغیر در نظر گرفته بشه. مثلاً

در مثال اول:

$$7 = 7x^0$$

پس همه اعداد صحیح می‌تونن به عنوان یک جمله‌ای در نظر گرفته بشن، یک جمله‌ای‌هایی که توان متغیرشون صفره

۲. دوام اینکه ما هم می‌تونیم یه متغیر داشته باشیم و هم بیشتر. مثلا در مثال سوم ما سه تا متغیر a و X و Z داریم.

عبارتهای زیر یک جمله‌ای نیستن:

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

دونه دونه بررسی می‌کنیم تا ببینیم اینا کدوم یکی از خصوصیات یک جمله‌ای‌ها رو ندارن:

$$\frac{1}{x}$$

آیا این عبارت، یک جمله‌ایه؟ توان متغیر رو بررسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

توان متغیر برابر -1 شد ولی ما در تعریف یک جمله‌ای گفته بودیم که توانها باید صحیح و نامنفی باشن.

$$3^x$$

این عبارت هیچکدوم از خصوصیات گفته شده رو نداره. ما توی یک جمله‌ای‌ها نمی‌تونیم متغیر رو توی توان داشته باشیم.

$$2\sqrt{x}$$

توان متغیر رو بررسی می‌کنیم:

$$2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$$

اینجا هم توان متغیر با تعریف یک جمله‌ای سازگاری ندارد، چون توان متغیر به عدد گویاست ولی طبق تعریف باید صحیح باشد.

$$|x|$$

عبارت‌توایی که قدرمطلق دارن یک جمله‌ای نیستند.

$$2x^2 + 2x$$

هر کدوم از این جملات به تنهایی یک جمله‌ای هستن ولی چون بینشون علامت جمع اومده دیگه یک جمله‌ای محسوب نمیشن.

$$\sqrt[3]{y}$$

در اینجا هم توان متغیر $\frac{1}{3}$ هست که عدد صحیح نیست.

$$1 + x$$

در اینجا هم این جملات هر کدوم به تنهایی یک جمله‌ای هستن ولی چون با هم جمع شدن دیگه یک جمله‌ای محسوب نمیشن.

چند جمله‌ای‌ها :

تا اینجا یک جمله‌ای‌ها رو شناختیم و یاد گرفتیم بطوری حاصلضرب چند تا یک جمله‌ای رو به دست بیاریم. حالا می‌فوییم با چند جمله‌ای‌ها آشنا بشیم:

چنانچه دو یا چند یک جمله‌ای را با هم جمع یا تفریق کنیم، حاصل چند جمله‌ایست.

مثال:

$$4x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{2}axy^2 - axy, \quad 3x^2$$

همینطور که می‌بینید هر کدام از چند جمله‌ای‌ها حاصل جمع یا تفریق چند تا یک جمله‌ایه.

حالا میریم سراغ تعریف **عبارت گویا**:

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد.

بنابراین آله یه کسر داشته باشیم که هم صورت و هم مخرجش چند جمله‌ای باشه، در اینصورت اون کسر یه عبارت گویا هست.

مثال:

عبارت‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^2-2x^2+1} \text{ و } \frac{x+5}{x-1} \text{ و } \frac{-a}{4} \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } \frac{x-3}{4} \text{ و } \frac{x}{y} \text{ و } \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \text{ و } \frac{10}{x+2} \text{ و } \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \text{ و } \frac{xy^2}{(x-y)^2} \text{ و } \frac{x^2}{1} \text{ و } \frac{-a}{b} \text{ و } x^2+2x-7$$

ممکنه این سوال براتون پیش بیاد که آخرین عبارت که کسری نیست ، پس چرا میگیریم عبارت گویاست؟

ما می‌تونیم این عبارت رو به کسر با مخرج ۱ در نظر بگیریم. به طور کلی به چند جمله‌ای هم به عبارت گویا محسوب میشه.
عبارتهای زیر گویا نیستن:

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

چرا این عبارتها گویا نیستن؟

باید بررسی کنیم چرا صورت یا مخرج این کسرها چند جمله‌ای نیستن؟

وجود قدرمطلق و رادیکال باعث میشه این عبارتها چند جمله‌ای نباشن و بنابراین در شرایط عبارتهای گویا صدق نکنن.

بنابراین عبارتهایی که رادیکال یا قدرمطلق دارن ، عبارت گویا نیستن.

مقدار عددی یک عبارت گویا :

برای به دست آوردن مقدار عددی به عبارت گویا، به جای متغیرش عدد قرار میدیم.

مثال:

مقدار عددی $\frac{x+2}{x-1}$ را به ازای مقادیر ۲ و ۵ و ۶ به دست آورید.

ما باید به بار به جای x قرار بدیم ۲ و بعد مقدار عبارت رو به دست بیاریم. به بار قرار بدیم ۵ و به بار هم ۶.

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{5+2}{5-1} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{6+2}{6-1} = \frac{8}{5}$$

حالا فرض کنید از ما فواستن که مقدار عددی عبارت بالا رو به ازای $x = 1$ به دست بیاریم. چکار می‌کنیم؟ مثل حالت‌های قبل به جای x مقدار ۱ رو قرار میدیم:

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{1+2}{1-1} = \frac{3}{0}$$

چه مشکلی پیش اومد؟؟؟

ما هیچوقت نمی‌تونیم کسری داشته باشیم که مخرجش برابر صفر باشه ولی اینجا مخرج کسر صفر شده. پس می‌گیریم این عبارت به ازای $x = 1$ تعریف نشده‌س.

بنابراین ما نمی‌تونیم مقدار عددی به عبارت رو به ازای عددهایی به دست بیاریم که مخرج رو صفر می‌کنن، در واقع عبارت گویا به ازای این مقادیر تعریف نشده‌س.

اگه به کسر به ما دادن و گفتن که این کسر به ازای چه مقادیری تعریف نشده‌س، باید چکار کنیم؟

باید تعیین کنیم که مخرج به ازای چه عباراتی صفر میشه، برای این منظور مخرج رو برابر صفر قرار میدیم و جوابها رو به دست میاریم.

مثال:

عبارت گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

$$\frac{x + 5}{x - 21}$$

مخرج رو برابر صفر قرار میدیم:

$$x - 21 = 0$$

این معادله رو حل می‌کنیم تا مقدار x به دست بیاد:

$$x - 21 = 0 \rightarrow x = 21$$

پس این عبارت گویا به ازای عدد ۲۱ تعریف نشده است.

مثال بعد:

عبارت گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

$$\frac{x^2 + 15}{(x - 2)(x + 1)}$$

*** اگر مخرج کسر دو تا پرانتز بود که در هم ضرب شده بودن، ما باید هر پرانتز رو جداگانه برابر صفر قرار بدیم:

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

پس این عبارت گویا به ازای مقادیر ۲ و -۱ تعریف نشده است.

چرا هر دو پرانتز رو برابر صفر قرار دادیم؟

ما داریم دنبال عددهایی میگردیم که مخرج رو صفر می‌کنن، هر کدوم از پرانتزها که صفر بشه باعث میشه که مخرج صفر بشه.

حل تمرین صفحه ۱۱۷

ساده کردن عبارتهای گویا

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{5x}{3ab^2}$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)}$

ج) $\frac{2P}{P^2 - P - 12}$

د) $\frac{2x+5}{x}$

ه) $\frac{x^2-1}{x+5}$

عبارت گویا در نقاطی که مخرج صفر میشه تعریف نشده‌س. بنابراین در هر قسمت مخرج رو برابر صفر قرار میدیم تا این مقادیر به دست بیان.

الف:

$$3ab^2 = 0 \rightarrow a = 0, b = 0$$

پس این عبارت در جاهایی که a یا b برابر صفر باشن، تعریف نشده‌س.

ب:

$$y(2y - 6) = 0$$

$$y = 0$$

$$2y - 6 = 0 \rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3$$

این عبارت گویا به ازای $y=0$ و $y=3$ تعریف نشده است.

ج:

$$p^2 - p - 12 = 0$$

برای به دست آوردن جوابهای این معادله ابتدا اون رو با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم.

به دنبال دو تا عدد می‌گردیم که ضربشون برابر -12 و جمعشون برابر -1 بشه. این اعداد عبارتند از -4 و $+3$

$$p^2 - p - 12 = (p + 3)(p - 4) = 0$$

حالا این پرانتزها رو مساوی صفر قرار میدیم:

$$p + 3 = 0 \rightarrow p = -3$$

$$p - 4 = 0 \rightarrow p = 4$$

د:

$$x = 0$$

ه:

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{3-x}{x^2-5x+6}$

ب) $\frac{4x^2+8x}{12x+24}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2-6x}$

د) $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y}$

ه) $\frac{1-t^4}{t^2+1}$

ز) $\frac{6a^4b^2}{fab^4}$

باید صورت و مخرج رو تجزیه کنیم و بعد عبارتهای مشترک رو با هم ساده کنیم:

الف:

مخرج کسر رو با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم. به دنبال دو تا عدد می گردیم که ضربشون برابر ۶+ و جمعشون برابر ۵- بشه. این دو عدد عبارتند از ۲- و ۳- . بنابراین:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0$$

باگذاری می کنیم:

$$\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{3-x}{(x-2)(x-3)}$$

اگه توجه کنیم می بینیم اگه از ۳- علامت منفی رو فاکتور بگیریم با عبارت ۳- x در مخرج برابر میشه و می تونیم با هم ساده شون کنیم:

$$\frac{3-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = \frac{-1}{x-2}$$

ب:

ابتدا صورت رو تجزیه می کنیم. از 4x فاکتور می گیریم:

$$4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$$

در مخرج هم از ۱۲ فاکتور می‌گیریم:

$$12x + 24 = 12(x + 2)$$

باگذاری و ساده می‌کنیم:

$$\frac{4x^2 + 8x}{12x + 24} = \frac{4x(x+2)}{12(x+2)} = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}$$

ج:

در مخرج از 6x فاکتور می‌گیریم:

$$12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$$

باگذاری و ساده می‌کنیم:

$$\frac{24x^2}{12x^2 - 6x} = \frac{24x^2}{6x(2x - 1)} = \frac{4x}{2x - 1}$$

د:

در صورت و مخرج از y فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^2 + y} = \frac{y(y^2 - 2y - 3)}{y(y + 1)} = \frac{y^2 - 2y - 3}{(y + 1)}$$

صورت رو با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{y^2 - 2y - 3}{(y + 1)} = \frac{(y - 3)(y + 1)}{(y + 1)} = y - 3$$

صورت رو با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$1 - t^4 = (1 - t^2)(1 + t^2)$$

باگذاری و ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 - t^4}{t^2 + 1} = \frac{(1 - t^2)\cancel{(1 + t^2)}}{\cancel{t^2 + 1}} = 1 - t^2$$

:

$$\frac{6a^4b^2}{4ab^8} = \frac{3a^{4-1}}{2b^{8-2}} = \frac{3a^3}{2b^6}$$

۳- عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب) $\frac{2y-3}{3-2y}$

ج) $\frac{2y+3}{3+2y}$

د) $\frac{2y+3}{-2y-3}$

اگر صورت و مخرج با هم برابر باشند حاصل عبارت ۱ همیشه

اگر صورت و مخرج قرینه هم باشند، حاصل عبارت برابر -۱ همیشه.

از کجا بفهمی صورت و مخرج قرینه هستن؟ اگر از یکیشون -۱ رو فاکتور بگیریم با دیگری برابر میشه. یا به عبارت ساده‌تر همه جملات مساوی، علامتهاشون قرینه هم هست.

حالا دونه دونه گزینه ها رو بررسی می کنیم:

الف: صورت و مخرج نه مساوی هستن نه قرینه

ب:

علامت 2y در صورت مثبت و در مخرج منفی

علامت 3 در صورت منفی و در مخرج مثبت

بنابراین صورت و مخرج قرینه هستن، پس حاصل برابر 1- میشه.

ج: صورت و مخرج با هم برابرن، پس حاصل برابر 1 میشه.

د:

علامت 2y در صورت مثبت و در مخرج منفی

علامت 3 در صورت مثبت و در مخرج منفی

بنابراین صورت و مخرج قرینه هستن، پس حاصل برابر 1- میشه.

4- هر یک از عبارت های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

1) $\frac{a-2}{a+5}$	2) $\frac{a+2}{a+5}$	3) $\frac{2-a}{a+5}$
4) $\frac{-a-2}{-a-5}$	5) $\frac{a-2}{-a-5}$	6) $\frac{2-a}{-a-5}$

$$\frac{-a-2}{-a-5} =$$

از صورت و مخرج منفی رو فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{-a-2}{-a-5} = \frac{-(a+2)}{-(a+5)} = \frac{a+2}{a+5}$$

$$\frac{a-2}{-a-5} = \frac{-(2-a)}{-(a+5)} = \frac{2-a}{a+5}$$

$$\frac{2-a}{-a-5} = \frac{-(a-2)}{-(a+5)} = \frac{a-2}{a+5}$$

بنابراین:

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a+5}$	۳) $\frac{2-a}{a+5}$
۴) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۵) $\frac{a-2}{-a-5}$	۶) $\frac{2-a}{-a-5}$

۵- از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$

ب) $\frac{zx+y}{t}$

ج) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$

د) $z \times \frac{x+y}{t}$

ه) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$

و) $\frac{zx}{t} + y$

الف : برابره

ب: برابر نیست. آگه بفوایم پرانتز رو حذف کنیم، z باید هم در x و هم در y ضرب بشه.

ج: برابره

د: برابره

ه: برابره

$$\frac{z(x+y)}{t} = \frac{zx+zy}{t} = \frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$$

و: برابر نیست.

۶- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف) $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z(z^2+1)}$

ب) $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6}$

ج) $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} (\boxed{})$

د) $\frac{(x-5)(\boxed{})}{(x-2)(x-5)} = x+1$

الف:

مفرج در $z^2 + 1$ ضرب شده، پس برای اینکه تساوی برقرار باشه باید صورت رو هم در این عبارت ضرب کنیم:

$$\frac{1-z}{z} = \frac{(1-z)(z^2+1)}{z(z^2+1)}$$

ب: اینجا به راحتی نمی‌تونیم بفهمیم که $x - 3$ در پی ضرب شده که تبدیل به $x^2 - x - 6$ شده. برای اینکه بتونیم تشخیص بدیم باید $x^2 - x - 6$ رو تجزیه کنیم:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

باگذاری می‌کنیم:

$$\frac{3x}{x - 3} = \frac{\quad}{(x - 3)(x + 2)}$$

حالا واضحه که مخرج در $x + 2$ ضرب شده پس صورت رو هم در $x + 2$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{3x}{x - 3} = \frac{3x(x + 2)}{(x - 3)(x + 2)}$$

ج:

در اینجا مخرج رو جدا کرده (به عبارت دیگه از $\frac{1}{5}$ فاکتور گرفته):

$$\frac{3y + 2}{5} = \frac{1}{5}(3y + 2)$$

د:

در اینجا عبارت $x - 5$ در صورت و مخرج ساده میشه، پس کسر سمت چپ به صورت زیر میشه:

$$\frac{(x - 5)(\dots)}{(x - 2)(x - 5)} = \frac{(\dots)}{(x - 2)}$$

حالا این مقدار رو با سمت راست مساوی قرار میدیم:

$$\frac{(\dots)}{(x-2)} = x + 1$$

در سمت راست عبارت $(x-2)$ رو نداریم، پس هتما این عبارت در صورت وجود داشته که با مخرج ساده شده.

دیگه چی باید داشته باشیم توی صورت؟ $x + 1$. چون بعد از ساده کردن، این عبارت باقی مونده. بنابراین صورت کسر به صورت زیر بوده:

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = x + 1$$

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال های [@RiaziBaHam](https://www.instagram.com/RiaziBaHam) و [@RiaziBaHam9](https://www.instagram.com/RiaziBaHam9)

برای دریافت جزوات سایر پایه ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.